Magreakciók hatáskeresztmetszete

1. A hatáskeresztmetszetek meghatározási módszerei

A magrekaciók hatáskeresztmetszetén azt értjük, hogy milyen valószínűséggel zajlanak le az általánosan

$$a + A \rightarrow B + b$$

típusú magreakciók. Ezek rövid jelölése

$$A(a, b)B$$

. Itt A a céltárgy mag, a a bombázó részecske.

A hatáskeresztmetszet megszokott definíciója a magreakciók időegységenkénti számából indul ki, ami általánosan mérhető mennyiség. A korábban tanult definíció a

$$\dot{N}_r = \sigma j_{be} N_c = \sigma I_{be} \varrho_c dx$$

Ahol N_r a t idő alatt végbemenő reakciók száma, $\dot{N}_r = N_r/t$, az időegységenkénti magreakciók száma, N_c a céltárgy magok száma, j_{be} a bombázó részecskék részecske-áramsűrűsége, aminek mértékegysége $\frac{db}{s \cdot m^2}$.

1.1. A magreakciók hatáskeresztmetszetének kísérleti meghatározása

Ha a j részecske-áramsűrűség helyett az I részecske-áramerősséggel fejezzük ki a magreakciók számát, akkor $j = I/A$ alapján (A a nyaláb keresztmetszete) a $jN_c = IN_c/A = I(\varrho_c A dx)/A$ átalakítások után a $\dot{N}_r = \sigma I_{be} \varrho_c dx$ formulát kapjuk. Itt az $I_{be} = \frac{N_{be}}{t}$ a bombázó részecskék részecske-áramerőssége ($\frac{db}{s}$), ϱ_c a céltárgyban a részecske-sűrűség ($\frac{db}{m^3}$), és dx a céltárgy vastagsága. Az I_{be} mennyiséget megadhatjuk db/s = pps (particle per second) mértékegységben is. Sokszor azonban a nyaláb elektromos áramerősségének (I_{el}) mérésével határozzák meg a bombázó részecskék részecske-áramerősségét. Ha a bejövő részecskenyaláb elektromos áramerőssége 1 nA, akkor abban másodpercenként $I_{0,be} = \frac{10^{-9} Cb/s}{Ze} = \frac{10^{-9} Cb/s}{Z \cdot 1{,}6 \cdot 10^{-19} Cb} = \frac{6}{Z} \cdot 10^9 \frac{db}{s}$ részecske érkezik. Ha a mért elektromos áramerősség ennek q-szorosa, akkor $I_{be} = \frac{q6}{Z} \cdot 10^9 \frac{db}{s} = q \cdot I_{0,be} = q$ pnA. Itt a pnA mértékegység neve ”particle nano-amper”.

1.2. A magreakciók kvantummechanikai leírásának keretei

A magreakciók hatáskeresztmetszetének kvantummechanikai számolásában a bejövő nyalábot mindig egy részecske reprezentálja. Ezt egy síkhullámmal írjuk le. $\Psi_{be} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\underline{kr}}$. Itt V egy bombázó részecske hullámcsomagjának térfogata, amit általában ”elegendően” nagy térfogatnak képzelünk el, és kiesik a végeredményekből.

A magreakciók során ez a jó nagy síkhullám a végtelenből érkezve benyomul a céltárgy potenciáljába, kölcsönhat a céltárgyat leíró potenciállal, és a hullámfüggvény az időfüggő Schrödinger-egyenlet alapján fejlődik, és nyeri el reakció utáni végső (aszimptotikus) állapotát. A magerők rövid hatótávolsága miatt a Born-közelítés alkalmazható, de az atommag elektromos taszítása miatt mindig jelen lévő végtelen hatótávolságú elektromos erőtér mindig egy kicsit bonyolultabb esetekre, és precízebb megfogalmazásokra vezet. Figyelembe kell venni, hogy a valóságban egy általános céltárgyban az atomi elektronok leárnyékolják a céltárgy mag elektrosztatikus erőterét, ezért a céltárgytól elegendően

nagy távolságra már szabad mozgást végez minden reakciótermék. A többszörös szórások egyazon céltárgyon belül nagyon kis valószínűségűek. Az időfüggő megoldást az esetek elhanyagolható számában szokás végigszámolni, ehelyett számos közelítő módszer létezik a hatáskeresztmetszetek meghatározására.

A hullámfüggvény a reakció lezajlása után, új formát ölt:

$$\Psi_{\text{reakció után}} = \alpha\Psi_{be} + \Psi_{kcsh}$$

Az első tag azt jelenti, hogy a bejövő nyaláb egy része torzulásmentesen túlélte a kölcsönhatást, a második tag a bejövő atommag és a céltárgy közötti kölcsönhatás miatt létrejövő része a reakció utáni hullámfüggvénynek.

A magerő rövid hatótávolságú, az elektromos taszítást is leárnyékolja egy idő után az atommagok körüli elektronfelhő, ezert a végső (aszimptotikus) hullámfüggvény a szabad mozgás hullámfüggvénye, a kölcsönhatás által meghatározott kezdőfeltételekkel. A szabad mozgás ilyenkor egyrészt a bejövő síkhullám maradék része és a többi a reakcióban keletkezet komponenst leíró kölcsönhatásmentes hullámfüggvény a kifutó gömbhullám, amit szögfüggő függvénnyel megszorozhatunk. Ez utóbbit a kölcsönhatás potenciálja határozza meg.

$$\Psi_{\text{reakció után}} = \alpha\Psi_{be} + f(\vartheta,\phi)\frac{e^{-ikr}}{r}$$

A kifelé mozgást ez a formula nem direktben mutatja, de ha odaképzeljük a stacionárius időfüggést ($e^{-\frac{i}{\hbar}Et}$), akkor abból már érthető a mozgások iránya.

1.3. A magreakciók kvantummechanikai számolásának lépései

A kvantummechanikai számolás az általános $\dot{N}_r = \sigma j_{be} N_c$ hatáskeresztmetszet definíción alapul, és figyelembe vesszük, elemi bombázó részecske - céltárgy üközéseket írunk le, és ekkor a céltárgy atommagok száma egy, $N_c = 1$, valamint a bombázó részecske teljes térre vett megtalálási valószínűségét is 1-re normáltuk. Ennek megfelelően egy egy-részecske-áramsűrűségét írjuk majd a nevezőbe $j^1_{be} = v|\Psi|^2$, ami valószínűség-áramsűrűséget jelent. Ennek megfelelően az 1 részecske által keltett reakciók számát kell a számlálóban is meghatározni.

$$\sigma = \frac{\dot{N}_r}{j_{be}N_c} = \frac{\dot{N}^1_r}{j^1_{be}}$$

A kísérletekben mért reakciószám (N_r) annyiszor több, ahány bombázó részecske érkezett be.

$$\int j^1_{be}dtdA = \int v|\Psi|^2dtdA = \int |\Psi|^2dsdA = \int |\Psi|^2dV = 1 \qquad \int j_{be}dtdA = N_{nyaláb} \Rightarrow \qquad j^1_{be} = \frac{j_{be}}{N_{nyaláb}}$$

A továbbiakban az "1" felső indexet csak akkor írjuk ki, ha szükséges.

A számolás 4 lépésből áll:

1. Először a bombázó részecskék Ψ_{be} hullámfüggvényének j_{be} áramsűrűségét kell kiszámolni, ami megadja a bombázó részecske áramsűrűségét a tér minden pontján. Ez egy valószínűség-áramsűrűség, hiszen 1 részecskére vonatkoztatjuk.

$$\underline{j}_{be} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{be}\nabla\Psi_{be} - \Psi_{be}\nabla\Psi^*_{be}\right)$$

2. A reakciók számához a Ψ_{kcsh} hullámfüggvénynek áramsűrűségét, ami megadja, hogy felületegységenként és időintervallumonként mennyi valószínűség áramlik ki a reakció színhelyéről a tér minden irányába a bombázó részecskék áramsűrűségén túl.

$$\underline{j}_{ki} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{kcsh}\nabla\Psi_{kcsh} - \Psi_{kcsh}\nabla\Psi^*_{kcsh}\right)$$

3. Ennek az áramsűrűségnek az integrálja egy elegendően nagy r sugarú gömbre megadja az időegységenként kiáramló valószínűséget, ami a reakciók számát jelenti 1 bombázó részecske esetén. Ha ezt az integrálást nem végezzük el, akkor térszög szerinti differenciális hatáskeresztmetszet kapunk. Az elegendően nagy r sugár azt jelenti, hogy ott már szabad részecskeként áramlanak a reakciótermékek kifelé, az ezeket leíró hullámfüggvények a áramsűrűség vektora radiális, ezért a $\underline{j}$ vektor vagy a j abszolut értéke egyaránt ugyanazt eredményezi a képletben. A vektoros felírásnál a térszögnek is tulajdonítunk egy radiális normálvektor jelleget.

$$\dot{N}_r = \int_{4\pi} j_{ki} r^2 d\Omega$$

Több bombázó részecske esetén, mint láttuk $N_{nyaláb}$-szor ennyi részecske repül ki a reakcióból reakciótermékként, akármilyen irányban a reakció után.

4. Ezekből ki tudjuk számolni a reakció hatáskeresztmetszetét, az általános érvényű a Hatáskeresztmetszet Megadása Valószínűségi Áramsűrűségekkel Általánosan (HMVÁ^2) nevű formulával:

$$\sigma = \frac{\int_{4\pi} j(\Psi_{kcsh}) r^2 d\Omega}{j_{be}} = \frac{\int_{4\pi} \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{kcsh}\nabla\Psi_{kcsh} - \Psi_{kcsh}\nabla\Psi^*_{kcsh}\right) r^2 d\Omega}{\left|\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{be}\nabla\Psi_{be} - \Psi_{be}\nabla\Psi^*_{be}\right)\right|} \tag{1}$$

1.4. Valószínűség-áramsűrűségek

1. Síkhullám áramsűrűsége
A bejövő részecskéket mindig egy véges de nagy méretű síkhullámmal közelítjük. Ezért ennek az áramsűrűsége minden számolásban előjön.

$$\Psi = \Psi_{be} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\underline{k}\underline{r}} \qquad \nabla\Psi = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\underline{k}\underline{r}}(-i\underline{k}) \qquad \Psi^* = \Psi^*_{be} = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}} \qquad \nabla\Psi^* = \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}}(i\underline{k})$$

$$\underline{j}_{be} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{be}\nabla\Psi_{be} - \Psi_{be}\nabla\Psi^*_{be}\right) = \frac{i\hbar}{2m}\left(\frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\underline{k}\underline{r}}(-i\underline{k}) - \frac{1}{\sqrt{V}} e^{-i\underline{k}\underline{r}} \frac{1}{\sqrt{V}} e^{i\underline{k}\underline{r}}(i\underline{k})\right) =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m}\frac{1}{V}(-2i\underline{k}) = \frac{1}{V}\frac{\hbar\underline{k}}{m}$$

$$j_{be} = \frac{\hbar k}{Vm} \qquad \text{ami a megszokott formulára hozható:} \qquad j_{be} = \frac{p}{Vm} = \frac{mv}{Vm} = \varrho v$$

Ezzel HMVÁ^2 általános érvényű képletnek megadhatjuk egy speciálisabb, de az esetek legnagyobb részében használt változatát, amikor a nevezőben szereplő valószínűségi áramsűrűség helyére beírjuk a most megkapott $j_{be} = \frac{\hbar k}{Vm}$-t. Ez a befutó SíkHullámokra érvényes Hatáskeresztmetszet Megadó Valószínűségi Áramsűrűséget használó formula (SH^{2}MVÁ).

$$\sigma = \frac{\int_{4\pi} j(\Psi_{kcsh}) r^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{Vm}} = \frac{\int_{4\pi} \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{kcsh}\nabla\Psi_{kcsh} - \Psi_{kcsh}\nabla\Psi^*_{kcsh}\right) r^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{Vm}} =$$

$$= \frac{i}{2k}\int_{4\pi} V\left(\Psi^*_{kcsh}\nabla\Psi_{kcsh} - \Psi_{kcsh}\nabla\Psi^*_{kcsh}\right) r^2 d\Omega \tag{2}$$

2. Izotróp gömbhullámok valószínűség-áramsűrűsége

Az izotróp gömbhullámok esetén a ∇-t polarkoordinátás alakban érdemes kiszámolni. A ϑ, ϕ komponensek értéke 0, az izotrópia miatt. Ezért csak az r függő komponenst számoljuk, $\underline{j}_{ki}$ iránya mindig sugárirányú, és nagyságát a gradiens r komponensének számolási szabályának megfelelően $\frac{\partial}{\partial r}$ szerint kell számolni.

a) kifutó gömbhullám, egy komplex állandóval ($z \in \mathbb{C}$) szorozva

$$\Psi(\text{kifutó gömbhullám}) = \Psi = z\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad \nabla\Psi = z\frac{e^{-ikr}(-ik)}{r} + z\frac{-e^{-ikr}}{r^2} = z\frac{e^{-ikr}}{r}\left(-ik - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Psi^* = z^*\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \nabla\Psi^* = z^*\frac{e^{ikr}(ik)}{r} + z\frac{-e^{ikr}}{r^2} = z\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)$$

$$j_{gh-ki} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)|_r = \frac{i\hbar zz^*}{2m}\left(\frac{e^{ikr}}{r}\frac{e^{-ikr}}{r}\left(-ik - \frac{1}{r}\right) - \frac{e^{-ikr}}{r}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= \frac{i\hbar|z|^2}{2m}\frac{1}{r^2}(-2ik) = \frac{|z|^2}{r^2}\frac{\hbar k}{m}$$

b) befutó gömbhullám, egy komplex állandóval ($z \in \mathbb{C}$) szorozva

$$\Psi(\text{befutó gömbhullám}) = \Psi = z\frac{e^{ikr}}{r} \qquad \nabla\Psi = z\frac{e^{ikr}(ik)}{r} + z\frac{-e^{ikr}}{r^2} = z\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right)$$

$$\Psi^* = z^*\frac{e^{-ikr}}{r} \qquad \nabla\Psi^* = z^*\frac{e^{-ikr}(-ik)}{r} + z^*\frac{-e^{-ikr}}{r^2} = z^*\frac{e^{-ikr}}{r}\left(-ik - \frac{1}{r}\right)$$

$$\underline{j}_{gh-be} = \frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*\nabla\Psi - \Psi\nabla\Psi^*\right)|_r = \frac{i\hbar|z|^2}{2m}\left(\frac{e^{-ikr}}{r}\frac{e^{ikr}}{r}\left(ik - \frac{1}{r}\right) - \frac{e^{ikr}}{r}\frac{e^{-ikr}}{r}\left(-ik - \frac{1}{r}\right)\right) =$$

$$= \frac{i\hbar|z|^2}{2m}\frac{1}{r^2}2ik = -\frac{|z|^2}{r^2}\frac{\hbar k}{m} = -\underline{j}_{gh-ki}$$

Egy gömb felületelemeinek normálvektorai kifelé mutatnak természetes módon, ezért a negatív előjel mutatja a befelé futás jelleget.

1.5. Hatáskeresztmetszet számolás módszere a Fermi-féle Aranyszabály segítségével

A hatáskeresztmetszet általános definícióját átírjuk arra az alakra, amikor a t idő alatt végbement reakciók teljes számának kifejezésében az összes bejövő részecskék száma ($N_{nyaláb}$) és az összes céltárgymag száma (N_c) szerepel. Ekkor a hatáskeresztmetszet és a nyaláb felületének hányadosa ad egy valószínűséget (p_1), ami egy bombázó részecske és 1 céltárgy mag kölcsönhatására vonatkozik.

$$N_r = \sigma j_{be} N_c t = \sigma\frac{N_{nyaláb}}{At}N_c t = \frac{\sigma}{A}N_{nyaláb}N_c = p_1 N_{nyaláb}N_c$$

Az időegységre jutó $w = \dot{p}_1$ valószínűséggel pedig a reakciók hozamát, időegységre jutó számát tudjuk megadni. A $\dot{p}_1$ szemléletes jelentését akkor tudjuk meglátni, ha a Fermi-féle Aranyszabálykor fennálló helyzetet elképzeljük. Itt egy H kölcsönhatási operátor hat egy adott ideig, és közben az átmeneti valószínűség időegységre jutó értékét számoljuk ki. Itt a kölcsönhatási operátor a két atommag közötti kölcsönhatást jelenti, ami annyi ideig áll fenn, amig a nagy de véges síkhullám áthalad a céltárgyon. Közben számolandó az átmeenti valószínűség időegységre jutó értéke.

$$\dot{N}_r = wN_{nyaláb}N_c \qquad \text{és} \qquad \dot{N}_r = \sigma j_{be}N_c \qquad \text{ebből:}$$

$$\sigma = \frac{wN_{be}N_c}{j_{be}N_c} = \frac{w}{j_{be}/N_{be}} = \frac{w}{j^1_{be}}$$

Az időegységre eső átmeneti valószínűséget a nyaláb hullámfüggvénye, a céltárgy mag hullámfüggvénye valamint a kölcsönhatást leíró Hamilton-operátor ismeretében meg tudjuk adni a Fermi-féle Aranyszabály segítségével. Továbbá a valószínűség-áramsűrűségre behelyettesítjük a korábban bevezetett formulát, és így kapjuk a Fermi-féle Aranyszabály segítségével számolt HatásKeresztMetszet formulát (FAHKM).

$$\sigma = \frac{\frac{2\pi}{\hbar}|\langle\Psi_{aA}|H|\Psi_{bB}\rangle|^2\varrho(E_{bB})}{\frac{i\hbar}{2m}\left(\Psi^*_{be}\nabla\Psi_{be} - \Psi_{be}\nabla\Psi^*_{be}\right)} = \frac{\frac{2\pi}{\hbar}|M_{ab}|^2\varrho(E_{bB})}{\frac{\hbar k}{Vm}} = \frac{2\pi}{\hbar^2}\frac{Vm}{k}|M_{ab}|^2\varrho(E_{bB})$$

2. Kisenergiájú izotróp magreakciók leírása

Ha a magreakció során a bombázó részecske energiája 10 MeV alatt van, akkor a reakció domináns csatornája az $\ell = 0$ parciális hullámhoz tartozik. Ez azért van, mert a két sugár összege plusz a magerők hatótávolságánál kisebb ütközési paraméter szükséges a kölcsönhatás létrejöttéhez, és ha ehhez kis energia, így kis sebesség társul, akkor a klasszikusan $L = mv(r_a + r_A + d)$ pályaperdület értéke nem éri el a $\hbar\sqrt{\ell(\ell+1)} = \sqrt{2}\hbar$-t.

A bombázó részecske jó nagy térfogatú de véges síkhullám hullámfüggvényét átalakíthatjuk úgy, hogy az $\ell = 0$ parciális hullám alakja $\sin kr/kr$ (ami csak sugárfüggő) belekerüljön:

$$\Psi_{be} = \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\underline{k}\underline{r}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{\sin kr}{kr} + e^{-i\underline{k}\underline{r}} - \frac{\sin kr}{kr}\right) = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr} + e^{-i\underline{k}\underline{r}} - \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}\right) = \Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3$$

Ebben felismerünk három féle hullámot.

1. $\ell = 0$ parciális hullám befutó gömbhullám része: $\Psi_1 = \frac{1}{2i\sqrt{V}}\frac{e^{ikr}}{kr}$

2. $\ell = 0$ parciális hullám kifutó gömbhullám része: $\Psi_2 = \frac{1}{2i\sqrt{V}}\frac{e^{-ikr}}{kr}$

3. $\ell > 0$ rész: $\Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(e^{-i\underline{k}\underline{r}} - \frac{e^{ikr}-e^{-ikr}}{2ikr}\right)$

A kisenergiás reakciók során, illetve a mostani közelítésünkben ($\ell = 0$), Ψ_3 változatlan marad a reakció során. A parciális hullámok módszere szerint a reakció időfüggő lezajlása azt eredményezi a végső $\Psi_{\text{reakció után}}$ hullámfüggvényben, hogy a Ψ_2 tag kap egy η komplex szorzótényezőt.

$$\Psi_{\text{reakció után}} = \Psi_1 - \eta\Psi_2 + \Psi_3 = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{e^{ikr} - \eta e^{-ikr}}{2ikr} + e^{-i\underline{k}\underline{r}} - \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}\right)$$

Amikor rugalmas szórást (rsz) írunk le, akkor $\eta = e^{i\delta}$. Egy egységnyi abszolut értékű komplex szám, ami a kifutó gömbhullám fázisát eltolja δ-val. Amennyiben az a részecskék elnyelődését írjuk le (elny), akkor η abszolut értéke lehet 1-nél kisebb.

Az $\eta = 1$ esetben az $e^{\pm ikr}$-es tagok mind kiesnek, és megmarad a kezdeti síkhullám. Amikor már van η, akkor így alakul a reakció utáni hullámfüggvény:

$$\Psi_{\text{reakció után}} = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{e^{ikr} - \eta e^{-ikr}}{2ikr} + e^{-i\underline{k}\underline{r}} - \frac{e^{ikr} - e^{-ikr}}{2ikr}\right) = \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{-\eta e^{-ikr}}{2ikr} + e^{-i\underline{k}\underline{r}} + \frac{e^{-ikr}}{2ikr}\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{V}}e^{-i\underline{k}\underline{r}} + \frac{1}{\sqrt{V}}\left(\frac{-\eta e^{-ikr}}{2ikr} + \frac{e^{-ikr}}{2ikr}\right) = \Psi_{be} + \frac{1-\eta}{2ik\sqrt{V}}\frac{e^{-ikr}}{r}$$

Azaz $\Psi_{kcsh} = \frac{1-\eta}{2ik\sqrt{V}}\frac{e^{-ikr}}{r}$.

a) Ezzel az izotróp rugalmas szórás hatáskeresztmetszetét kiszámolhatjuk:

$$\sigma = \frac{\dot{N}_r^1}{j_{be}^1} = \frac{\int_{4\pi} j(\Psi_{kcsh})r^2 d\Omega}{j_{be}^1} = \frac{Vm}{\hbar k}4\pi r^2 \cdot j(\Psi_{kcsh})$$

A Ψ_{kcsh} valószínűség-áramsűrűségét a már kiszámolt formulával határozzuk meg. $j = \frac{|z|^2}{r^2}\frac{\hbar k}{m}$, ebben az esetben $z = \frac{1-\eta}{2ik\sqrt{V}}$, ezért

$$j(\Psi_{kcsh}) = \left|\frac{1-\eta}{2ik\sqrt{V}}\right|^2 \frac{1}{r^2}\frac{\hbar k}{m} = \frac{|1-\eta|^2}{4k^2V}\frac{1}{r^2}\frac{\hbar k}{m}$$

Ezzel a rugalmas szórás hatáskeresztmetszete

$$\sigma = \frac{Vm}{\hbar k}4\pi r^2 \cdot j(\Psi_{kcsh}) = \frac{Vm}{\hbar k}4\pi r^2 \frac{|1-\eta|^2}{4k^2V}\frac{1}{r^2}\frac{\hbar k}{m} = \frac{\pi}{k^2}|1-\eta|^2$$

Itt $\eta = e^{i\delta}$.

b) Elnyelődés számolása

A bombázó „a” részecske elnyelésének valószínűségét is ki tudjuk számolni ezzel a formalizmussal az izotróp esetben. A rugalmas szórás esetén a fenti Ψ_1 és Ψ_2 hullámfüggvények abszolutérték négyzetei megegyeznek, valószínűség-áramsűrűségeik egymás -1-szeresei. Amennyi valószínűség befut a befutó gömbhullámmal (Ψ_1), ugyanakkora valószínűség fut ki, mert $|\eta| = 1$ volt. Az elnyeléskor az történik, hogy kisebb a kifutó Ψ_2 hullám teljes valószínűsége, és így valószínűség-áramsűrűsége, mint a befutóé. Ilyenkor $|\eta| < 1$, azaz $\eta = ae^{i\delta}$, és $a < 1$ valós szám.

Az elnyelődés valószínűsége a befutó és a kifutó valószínűségek különbsége. Ezt a befutó és a kifutó gömbhullámok által hordozott valószínűségi áramsűrűségek vektoros összegéből, vagy a nagyságuk különbségéből tudjuk kiszámolni. $\underline{j}_{elny} = \underline{j}_{be-gh} + \underline{j}_{ki-gh}$ és $j_{elny} = |j_{be-gh}| - |j_{ki-gh}| = j(\Psi_1) - j(\Psi_2)$. Ez lesz a kölcsönhatás valószínűség-áramsűrűsége az elnyelődés esetén, ebből kell kiszámolni a hatáskeresztmetszetet az előzőekben leírt módon. $\sigma = \int_{4\pi}(j(\Psi_1) - j(\Psi_2)r^2 d\Omega / j_{be}$. Itt alkalmazzuk a gömbhullámok valószínűség-áramsűrűségére kapott $\pm\frac{|z|^2}{r^2}\frac{\hbar k}{m}$ formulát, ahol a $-$ előjel a befutó hullámra vonatkozik. Ezen túl felhasználjuk a $\Psi_{\text{reakció után}}$ hullámfüggvény $\ell = 0$-s részét képező Ψ_1, Ψ_2 definícióit, $\Psi_1 = \frac{1}{2i\sqrt{V}}\frac{e^{ikr}}{kr}$ és $\Psi_2 = \frac{\eta}{2i\sqrt{V}}\frac{e^{-ikr}}{kr}$. Ezért $z_1 = \frac{1}{2ik\sqrt{V}}$ és $z_2 = \frac{\eta}{2ik\sqrt{V}}$.

$$j(\Psi_1) = \left|-\frac{1}{4k^2Vr^2}\frac{\hbar k}{m}\right| = \frac{\hbar}{4Vkr^2m} \qquad \text{és} \qquad j(\Psi_2) = \frac{|\eta|^2}{4k^2Vr^2}\frac{\hbar k}{m} = \frac{|\eta|^2\hbar}{4Vkr^2m}$$

Ebből az ”a” részecske befogásának hatáskeresztmetszete SH^{2}MVÁ használatával:

$$\sigma = \frac{\int_{4\pi} j_{elny}r^2 d\Omega}{\frac{\hbar k}{Vm}} = \frac{Vm}{\hbar k}4\pi r^2\left(j(\Psi_1) - j(\Psi_2)\right) = \frac{Vm}{\hbar k}4\pi r^2\left(\frac{\hbar}{4Vkr^2m} - |\eta|^2\frac{\hbar}{4Vkr^2m}\right) = \frac{\pi}{k^2}\left(1 - |\eta|^2\right)$$

A k mértékegysége 1/m, ezért a kapott π/k^2 alak éppen $r^2\pi$ típusú eredményt adott, ami egyfajta geometriai hatáskeresztmetszetként is értelmezhető, ahol előjön a de Broglie-hullámhossz (λ).

$$k = \frac{p}{\hbar} = \frac{h/\lambda}{\hbar} = \frac{2\pi}{\lambda} \qquad \text{ezért} \qquad \frac{\pi}{k^2} = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^2\pi = \lambda\!\!\!^{-2}\pi = R^2\pi$$

Érdekes, hogy ha $a = 0$, azaz a maximális elnyelődés esete áll fenn, akkor is van rugalmas szórás. Ha $\eta = ae^{i\delta}$ és $a = 0$, akkor is érvényes az $|1-\eta|^2$ formula, ami 1-et ad eredményül, azaz ha a teljes befutó gömbhullám elnyelődik az $\ell = 0$ parciális hullámban, akkor az hiányzik az $\ell > 0$ részből (Ψ_3), és ezért a kezdeti hullámfüggvény az elnyelés mellett torzul is, és emiatt lesz rugalmas szórási része is a magreakciónak. Ha $a = 0$, akkor a befogás és a rugalmas szórás hatáskeresztmetszete egyaránt π/k^2, így a reakció teljes hatáskeresztmetszete $\sigma_{kcsh} = 2\frac{\pi}{k^2}$.

3. A bombázó energiához képest nagy Q-értékű direkt reakciók hatáskeresztmetszete

Tipikus magreakció, aminek a hatáskeresztmetszetének energiafüggésére egy elég általános szabály létezik, a neutronok befogása. Vizsgáljuk most azokat az eseteket, amikor a neutronok bombázó energiája 1-2 MeV-nél kisebb. A magreakciók Q-értéke, ami a kezdeti és a végállapot tömegeinek különségéből fakadó nyugalmi energia különbséget jelenti, általában néhány MeV-nél nagyobb: $(m_a + m_A - m_b - m_B)c^2 = Q > 1MeV$.

Termikus neutronok befogásának esetén a neutronok energiája kb. $\frac{1}{40}$ eV, ami jóval kisebb a Q-értéknél, az esetek nagyon nagy részében.

Számoljuk ki ezen reakcók hatáskeresztmetszetét a FAHKM típusú formulával, azaz A Fermi-féle Aranyszabály segítségével.

$$\sigma = \frac{2\pi}{\hbar^2}\frac{Vm_a}{k_a}|M_{ab}|^2\varrho(E_{bB})$$

Ha az átmenet mátrixeleme nem függ a bombázó energiától, akkor energiafüggés csak a k_a és a $\varrho(E_{bB})$ tagokban van. A végállapoti állapotsűrűséget a szokásos módon a kirepülő részecskék impulzustérbeli állapotainak leszámolásával határozzuk meg. az impulzustérben egyenletes a végállapot valószínűsége, és az adott energiájú állapotok egy gömbhéjon vannak, ezért az állapotok száma $p_b^2 dp_b$. Továbbá: $\hbar k_a/m_a = p_a/m_a = m_a v_a/m_a = v_a$. Így:

$$\sigma = (...)\frac{m_a}{\hbar k_a}\varrho(E_{bB}) = (...)\frac{1}{v_a}p_b^2\frac{dp_b}{dE_b} = (...)\frac{p_b^2}{v_a v_b}$$

Amikor a Q-érték nagyon nagy, akkor a p_b és ezzel v_b értéke is meghatározott a Q által, és alig függenek ezek a neutron bombázó energiájától. Ez azt is jelenti, hogy a kirepülő részecskék közel homogár szögeloszlással keletkeznek a reakcióban, és a tömegközlppont mozgási energiája közel 0. Azaz p_b-t és v_b-t állandónak tekintjük. Ilyenkor:

$$\sigma = (...)\frac{1}{v_a}$$

Ez az 1/v törvény, amit számos néhány MeV alatti bombázó energiájú (n,γ), (n,p), (p.n) ... reakcióban kísérletileg is tapasztalhatunk.

A Fermi-féle Aranyszabály két állapot közötti átmenetre vonatkozik. Vannak olyan magreakciók, amikor nem csak a kezdeti és a végállapotok léteznek (direkt reakciók), hanem a reakció közben kialakul egy bomló állapot. Ez utóbbi esetén az 1/v törvény nem feltétlenül érvényes. Azaz azon bombázó energiák környékén, amelyek egy ún. összetett mag adott energiájú gerjesztett állapotára vezetnek, egy másik reakciómodellt alklamazunk.

4. Az összetett mag kialakulására vezető reakciók

A direkt reakciók a nukleonok reakció során történő közvetlen átrendeződésével mennek végbe. Amikor nem ez történik, akkor az az összetett magreakció. Ekkor kialakul egy gerjesztett atommag a reakció első lépése során, amelynek általában rövid a felezési ideje, és nagy a gerjesztési energiája, és az bomlik el a reakció második lépésében.